

Corrente elétrica

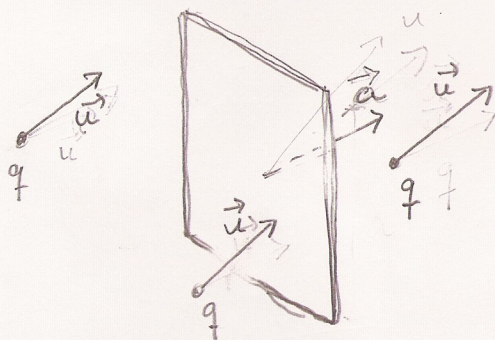
"Curso de Física de
Berkeley", vol. 2, capítulo 4
seções 4.1 - 4.61.1 Introdução

Como foi discutido na aula 1, os condutores são compostos por cargas que se movimentam livremente. Nesse estágio de discussões é o modelo que pode ser utilizado para representar o transporte de carga (corrente elétrica) num condutor. ~~le é um gás não interagente (V).~~ Na verdade, vamos introduzir a teoria de Drude para metais que é essencialmente uma aplicação da teoria cinética dos gases. ~~(não interagente)~~ O nosso modelo, para ser mais preciso, é um conjunto de esferas idênticas que se movem ~~em~~ ^{em} ~~se~~ ^{se} ~~entram~~ ^{entram} ~~em~~ ^{em} ~~um~~ ^{um} ~~linha~~ ^{linha} ~~reta~~ ^{reta} ~~até~~ ^{até} ~~que~~ ^{que} ~~apareça~~ ^{apareça} ~~uma~~ ^{uma} ~~colisão~~ ^{colisão}. ~~O~~ ^O ~~objetivo~~ ^{objetivo}, portanto, é entender como se comporta tal modelo quando um campo

elétrico (constante!) é aplicado. Em outras palavras como descrever correntes elétricas que aparecem nessas condições.

2. Transporte de carga = densidade de
corrente.

É evidente que o foco é descrever o transporte de carga líquida (c/ o respectivo sinal). Para isso é necessário introduzir o conceito de densidade de corrente. Considere primeiro uma situação particular. c/ n partículas p/



$$d\vec{A} = \vec{u} da$$

fig 1: $\vec{a}$ é um vetor perpendicular ao quadrado de área a .

cm^3 (em média). Todas as partículas se movem c/ velocidade $\vec{u}$ transportando a mesma carga q .

A pergunta é quantas ^{partículas} ~~através~~ ^{passam} de um "quadrado" de área a (ver fig. 1) no intervalo de tempo Δt . 3.

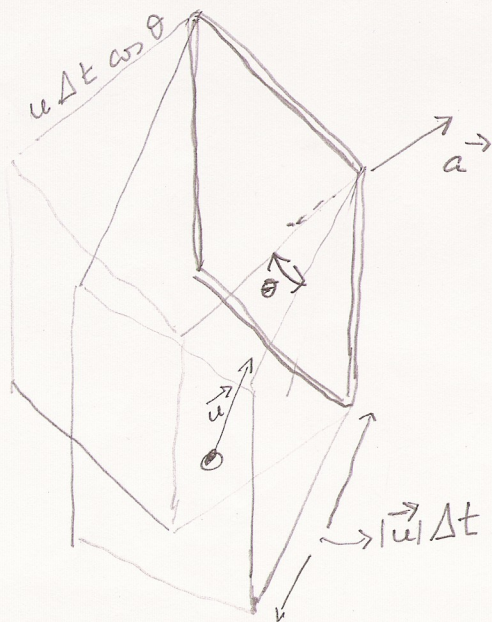


fig. 2

As partículas que não atravessam a seção reta ("quadrado") de área A no intervalo Δt são aquelas que se encontram no prisma ^{oblíquo} cuja base é um quadrado de aresta $u \Delta t$.

O volume do prisma é $\vec{a} \cdot \vec{u} \Delta t \cos \theta$

ou $\vec{a} \cdot \vec{u} \Delta t$. Em média, o nº de

partículas encontradas nesse volume é

$n \vec{a} \cdot \vec{u} \Delta t$. A razão média de carga

por quadrado de área é

$$I(a) = \frac{q (n \vec{a} \cdot \vec{u} \Delta t)}{\Delta t} = nq \vec{a} \cdot \vec{u} \quad (1)$$

que é exatamente a corrente. Em caso

geral onde existem vários tipos de partículas,
isto é, c/ cargas diferentes

$$I(a) = \vec{a} \cdot \sum_k n_k q_k \vec{u}_k \quad (2)$$

n_k densidade ^{média}
de partícula.

da k-ésima classe.

Podemos definir ^v densidade de corrente $\vec{J}$

$$\vec{J} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k \quad (3)$$

dado em ampere/cm².

Olhando em detalhe a Eq. (2), ela admite a situação em que temos, elétrons com diferentes velocidades. $\vec{v}_k$. O pto importante (esquecendo por agora a aplicação de um campo elétrico) é que em um condutor os elétrons tem distribuições de velocidades ao acaso. Numa linguagem mais precisa, uma distribuição aleatória de velocidades. Isso significa que o módulo e a direção de $\vec{v}$ variam ao acaso.

A abordagem mais adequada nestas condições é introduzir o conceito de velocidade média

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{1}{N_e} \sum_k n_k \vec{u}_k \quad (4)$$

onde N_e é o número total de elétrons p/ unidade de volume. Então, combinando Eqs. (3) e (4) com $q = -e$

$$\vec{J} = -e N_e \left(\frac{1}{N_e} \sum_k n_k \vec{u}_k \right)$$

$$\vec{J} = -e N_e \langle \vec{u}_e \rangle \quad (5)$$

Atenção: A densidade de corrente depende da velocidade média dos elétrons

3. Correntes estacionárias

Podemos relacionar a corrente I com a
densidade de corrente $\vec{J}$

(6.a)

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (1)$$

Considere uma superfície fechada S , então

(6.b)

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

O lado direito da Eq. (6.b) é equivalente

à razão de carga para fora de uma região

de volume V recoberta pela área S . O

sinal da razão é positivo se portadores de
carga positiva estiverem saindo, ou se portadores

de carga negativa estiverem entrando.

teorema da divergência

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

Se $\int_V \rho \, dv$ é a carga total
 contida no volume v , a eq. também
 pode ser escrita como $-\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv$.
 Mas pelo teorema da divergência

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) \, dv \quad (7)$$

Logo

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) \, dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv \quad (8)$$

ou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d}{dt} \rho \quad (9)$$

Conservação de carga !

4. Lei de Ohm

Uma relação experimental

$$V = R I \quad (\text{Lei de Ohm}) \quad (10)$$

Para eliminar a dependência da resistência R na forma do fio (eliminar a geometria do problema) vamos introduzir a lei de Ohm na forma

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (11)$$

ρ é a resistividade que depende das propriedades microscópicas do material

Então, pela Eq. (6) p/ $\vec{J}$ constante

$$J = I/A \quad (12)$$

Como num fio

$$V = E l \quad (13) \quad l = \text{comprimento de um pedaço do fio}$$

então

$$V = \left(\int J \right) l \quad (14)$$

ou

$$V = \int \left(\frac{l}{A} \right) I \quad (15)$$

Comparando com a lei de Ohm dada

na Eq. (10),

$$R = \int \left(\frac{l}{A} \right) \quad (16)$$

ou

resistência geométrica do fio

Podemos trabalhar também com a conduti-

vidade

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (17)$$

$$[\rho] = \text{ohm} \cdot \text{cm}$$

5. Modelo para condutores elétricos

Vamos assumir que existem igualmente portadores de carga positiva e negativa com densidade N , que tem, respectivamente, massa e carga (M_+, e) e $(M_-, -e)$. A densidade de corrente $\vec{J}$ é determinada a partir da vel. média de cada um dos portadores.

$$N = \text{n}^\circ \text{ de portadores p/ unidade de volume}$$

Um campo elétrico $\vec{E}$ é aplicado. Portanto,

cada portador de carga está sob ação de uma
força $\checkmark$ $q \vec{E}$ ($q = \pm e$).

Se um sist. físico obedece a lei de Ohm,
significa que a velocidade média dos portadores
é proporcional à força ($\vec{J}$ constante $\sim$ $\vec{E}$ constante).

A conclusão é que existe algum mecanismo que
se opõe ao movimento produzido pelo campo elétri-
co. Pelo modelo proposto, esse mecanismo só
pode ser colisões de portadores c/ outros porta-
dores ou com outras partículas presentes no
sist. físico.

A teoria cinética dos gases nos diz que, na ausência de um campo elétrico, os átomos e íons se movem com velocidades aleatórias cuja $\langle \vec{u}^2 \rangle$ média é determinada ^{pela temperatura,} pelo teorema de equipartição de energia

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle \vec{u}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (18)$$

Suponha que fosse possível seguir a trajetória de um portador

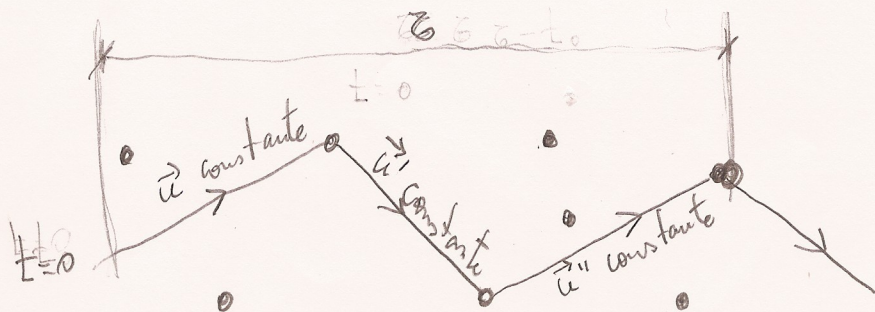


fig. 3

o ponto fundamental é que

num intervalo de tempo Δt , a velocidade $\vec{u}$ do íon e^- independente da velocidade $\vec{u}$

em $t=0$. (O íon perdeu a "memória").

Em outros palavras,

qualquer que seja a natureza da colisão, após

um certo tempo $t=\tau$ (tempo de relaxação) existe uma perda de correlação entre as velocidades $\vec{u}(t=0)$ e $\vec{u}(t=\tau)$.

Agora, com o campo elétrico $\vec{E}$ aplicado a situação se altera. Seja

$\vec{u}_c$, a velocidade imediatamente após 1 colisão, então o momento linear de 1 íon e^-

$$\vec{p} = M \vec{u}_c + \vec{E} q t \quad (13) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = e \vec{E}$$

se $M u_c \gg E e t$ podemos esperar

que a próxima colisão acontece num intervalo de tempo praticamente igual à

situação em que o campo elétrico está ausente

Colocando de outra maneira, o tempo médio entre colisões $\langle t \rangle$ é independente do campo (se este não for muito grande).

Agora podemos nos perguntar:

qual o momento linear médio de todos os íons?
Imaginando N íons positivos

$$M \langle \vec{u}_+ \rangle = \frac{1}{N} \sum_j (M \vec{u}_j + q_+ \vec{E} t_j) \quad (20)$$

$$M \langle \vec{u}_+ \rangle = M \left(\frac{1}{N} \sum_j \vec{u}_j^c \right) + q_+ \vec{E} \frac{1}{N} \sum_j \langle t_j \rangle \quad \text{eq. (16)}$$

mas $\langle \vec{u}_j^c \rangle = 0$, então

os t_j são aleatórios independentes do campo elétrico!

$$\langle \vec{u}_+ \rangle = \frac{\vec{E} q_+ \langle t_+ \rangle}{M_+} \quad (21)$$

ou $\langle \vec{u}_+ \rangle$ proporcional à força aplicada.

Voltando com *o resultado da* Eq. (21) para a Eq. (4), a densidade de corrente $\vec{J}$ pode ser escrita como:

$$\vec{J} = q_+ N_+ \langle \vec{u}_+ \rangle = q_+^2 \frac{N_+}{M_+} \langle t_+ \rangle \vec{E} \quad (22)$$

ou considerando também a possibilidade

de portadores positivos (íons positivos)

$Nq_+ \left(\frac{q_+ \langle t_+ \rangle}{m_+} \vec{E} \right) + Nq_- \left(\frac{q_- \langle t_- \rangle}{m_-} \vec{E} \right)$ nel a. sobre a. a. a. a.

$$\vec{J} = Ne \left(\frac{e \langle t_+ \rangle}{M_+} \vec{E} \right) + Ne \left(\frac{-e \langle t_- \rangle}{M_-} \vec{E} \right) \quad (23)$$

$$= Ne^2 \left(\frac{\langle t_+ \rangle}{M_+} + \frac{\langle t_- \rangle}{M_-} \right) \vec{E}$$

Como

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma = Ne^2 \left(\frac{\langle \tau_+ \rangle}{M_+} + \frac{\langle \tau_- \rangle}{M_-} \right) \quad (24)$$

σ ou ρ podem ser obtidas em laboratório. Portanto, no caso, em que temos só portadores de carga negativa (positiva) podemos estimar o tempo de relaxa

ção

$$\tau_{\pm} = \frac{M_{\pm} \sigma}{Ne^2} = \frac{M_{\pm}}{Ne^2} \frac{1}{\rho} \quad (25)$$

ver tabela 1.2 Ashcroft - Mermin
e tabela 1.3.

6. Falha da Lei de Ohm

Quando campos elétricos $\vec{E}$ são muito intensos, podemos esperar que $\langle t \rangle$ tenha uma dependência em $\vec{E}$. O critério

objetivamente

$$e E \cdot l \approx k_B T \quad (26)$$

$\underbrace{\text{energia cinética adicional}}_{\text{pelo campo elétrico}} \quad \underbrace{\text{energia cinética média}}_{\text{térmica}}$

onde $l \sim 10^{-6} \text{ cm}$ é o livre caminho médio do gás.

Isto é energia cinética adicional pela

presença do campo é comparável à energia

$k_B T$.